LA DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA, EL SUBSISTEMA DE CURVAS SIMÉTRICAS DE LA SISTEMATIZACIÓN PEARSONIANA, Y SU APLICACIÓN SOCIOGRÁFICA

Por Óscar Uribe Villegas

En el campo de la estadística, es bien conocida la relación que, por lo general, existe entre ciertas distribuciones discontinuas y determinadas distribuciones continuas, o sea, entre distribuciones que crecen por incrementos finitos y distribuciones que crecen por incrementos infinitamente pequeños o infinitesimales (y usamos estos últimos términos, a pesar de su general desprestigio, por conveniencias de contraste lingüístico). Ya en otro sitio hemos tenido ocasión de ver la forma en que la distribución binomial (discontinua) tiende a la normal (continua). En el caso presente, la relación se establece entre la distribución hipergeométrica (discontinua) y el sistema pearsoniano de curvas (continuas). Para nuestros propósitos presentes, con todo, centraremos nuestra atención en un subsistema de la sistematización general de Pearson: el constituido por sus curvas simétricas. Ello, a no dudarlo, facilitará el enfoque.

La forma matemática de la distribución hipergeométrica se establece con base en el cálculo de probabilidades y, una buena forma de aproximarse a su expresión general por caminos empíricos que pueden llegar a permitir que vislumbremos el significado de los diversos elementos que intervienen en su fórmula —y, ulteriormente, en las del sistema gestado por ella— puede consistir en tratar de resolver el siguiente problema que presentamos en líneas generales, en forma simplificada.

Se tienen n paquetes de barajas, con 52 cartas cada uno. Se trata de sacar una carta de cada paquete, pero, de tal modo que la carta extraída de cada uno de ellos sea diferente de la que se sacó (o de las que se sacaron) del paquete (o de los paquetes) previos. Se desea saber, ¿cuál es la probabilidad que hay de no obtener espadas (o sea, de obtener cero espadas), de obtener una, dos, tres... ene espadas, de ene paquetes?

A fin de hacer inteligibles los desarrollos y, al mismo tiempo, con objeto de evitar presentaciones textuales muy extensas que harían fatigosa una lectura que podría parecer reiterada o machacona (según ocurre en presentaciones textuales matemáticas), recurriremos a las siguientes convenciones:

Los paquetes de barajas los numeramos con romanos: I, II, III, IV... o sea, que I representa al primer paquete, II al segundo, etcétera.

La aparición de una espada en un paquete la indicaremos con una x colocada debajo del número romano correspondiente. Así, una x colocada debajo de IV significa que en el cuarto paquete se obtuvo una espada.

La aparición de una carta que no sea espada la indicaremos mediante una o, colocada debajo del número romano correspondiente. Así, una o colocada debajo de II significa que en el segundo paquete se obtuvo una carta que no fue espada.

Probabilidad de obtener cero, una o más espadas con uno, dos y tres paquetes de cartas. Caso límite de la distribución hipergeométrica es el constituido por el hecho de tomar un solo paquete de cartas (referencia 1). Con un paquete de cartas, y de acuerdo con las condiciones del problema, es posible obtener: o bien una carta que no sea espada, o bien una carta que sea espada.

Para determinar la probabilidad que hay de obtener una carta que no sea espada (referencia 1.1), o sea, para determinar la probabilidad que corresponde al esquema en el que debajo de I aparece o, será necesario dividir el total de cartas que no son espadas (39) entre el total de cartas del paquete, sean o no espadas (52) (referencia 1.13).

Para determinar la probabilidad que hay de obtener una carta que sea espada, con un solo paquete (referencia 1.2), será indispensable dividir el total de cartas que son espadas (13) entre el total de cartas del paquete (52) (referencia 1.23).

En caso de contar con dos paquetes de barajas (referencia 2), pueden obtenerse: dos cartas que no sean espadas, una carta que sea espada y una que no lo sea, o dos cartas que sean espadas (referencias 2.1, 2.2, 2.3).

La posibilidad que hay de que del primer paquete se extraiga una carta que no sea espada es de 39 sobre 52 (como en el caso anterior). La posibilidad que *habría* de que del segundo se extrajera una carta que no *fuera* espada *sería* también de 39 sobre 52 si esta probabilidad *fuese* independiente de la anterior. Sin embargo, esta posibilidad *no es* independiente de la anterior. De acuerdo con las condiciones del problema, es necesario que la carta que se extraiga del segundo paquete *no sea igual* a la extraída del primero. Esta condición significa que una de las cartas del segundo paquete (una de las 52) es como si no existiera, por ser igual a la ya extraída del primero (o sea que, de las 52 del paquete, quedan efectivamente 51). Por otra parte, en cuanto la carta extraída del primer paquete no fue espada, esto quiere decir que de las 39 espadas del segundo paquete hay una que es como si no existiera por ser igual a la extraída del primer paquete (o sea que de las 39 que no son espadas sólo quedan efectivamente 38). De acuerdo con todo lo anterior, la probabilidad que hay de obtener del segundo paquete una carta que no sea espada se obtendrá dividiendo el total de las cartas efectivas que no son espadas (38), entre el total efectivo de cartas (51) (referencia 2.13). Para obtener la probabilidad total, será necesario multiplicar entre sí las probabilidades parciales (referencia 2.14).

Para obtener la probabilidad que hay de sacar una espada de dos paquetes de cartas, dentro de las condiciones estipuladas (referencia 2.2), hay que señalar que existe la posibilidad de que esa espada salga en el primer paquete o salga en el segundo (referencias 2.221 y 2.222). En el primer caso, la probabilidad de obtener una espada del primer paquete es igual al total de espadas en el paquete (13), entre el total de cartas en el mismo (52) (referencia 2.23); en forma semejante a la que se presentaba en el caso previo, en cuanto las probabilidades del segundo paquete están condicionadas por la carta sacada del primero, de las 52 cartas del paquete, 1 queda anulada por ser igual a la obtenida del primer paquete (de donde, el total es 51), pero, en cuanto en este caso la carta obtenida es espada y del segundo paquete se obtienen no espadas, la carta obtenida no afecta al número de las no-espadas que es posible obtener del segundo paquete (ya que ninguna de éstas puede ser igual a la carta obtenida del primero). Es decir, que, para el segundo paquete la probabilidad está dada por el cociente entre 39 (no espadas) y 51 (cartas efectivas del paquete) (referencia 2.23). Como en el caso anterior, la probabilidad total estará dada por el producto de las probabilidades parciales (referencia 2.241). En el segundo caso, la probabilidad de obtener una carta que no sea espada del primer paquete es igual al total de las que no son espadas (39) entre el total de cartas (52) (referencia 2.232). En el segundo paquete, las cartas efectivas han llegado a ser 51; sin embargo, el total posible de espadas obtenibles del paquete no ha dejado de ser 13, puesto que la carta obtenida en el otro paquete no era espada. Consecuentemente, la probabilidad de obtener una espada del segundo paquete, aún dentro de las condiciones del problema será igual al cociente de 13 (total de espadas) entre 51 (total de cartas efectivas en el segundo paquete) (referencia igual). La probabilidad total estará dada asimismo por el producto de las probabilidades parciales. Si comparamos las probabilidades totales de uno y otro esquema (compárense las referencias 2.241 y 2.242), veremos que los resultados son los mismos. Esto quiere decir que si la probabilidad total del esquema primero (I-x, II-o) es (13 x 39) sobre (52 x 51) y la del segundo (I-o, II-x) es esa misma (39 x 13) sobre (52 x 51), la probabilidad de que se den indistintamente uno u otro esquema (o sea la probabilidad de obtener una espada de cualquiera de los dos paquetes) es igual a dos veces la probabilidad de cada uno (referencia 2.25).

En el caso de la probabilidad de obtención de dos espadas a partir de dos paquetes, no existe —como en el caso de dos no-espadas obtenidas de dos paquetes— sino un solo esquema posible (I-x, II-x). La probabilidad total de este esquema la obtendremos en forma parecida a las anteriores. En efecto, la probabilidad de obtener una espada del primer paquete estará dada por el cociente entre el total de espadas en el paquete (13) y el total de cartas en el paquete (52) (referencia 2.33). La probabilidad de obtener una espada del segundo paquete está condicionada por la carta obtenida del primero, pues de las 52 cartas originales, 1 queda anulada y, por otra parte, como la carta obtenida es una espada, ello quiere decir que de las 13 espadas posibles del paquete, 1 queda anulada; consecuentemente, la probabilidad del segundo paquete estará dada por el cociente de 12 (espadas efectivas en el paquete) entre 51 (cartas efectivas en este segundo paquete) (referencia 2.33). La probabilidad total estará dada por el producto de las probabilidades parciales (referencia 2.34). Como no hay sino un esquema de este tipo, la probabilidad de todos los esquemas posibles en los que se obtengan dos espadas de dos paquetes es esa misma probabilidad total, sin ninguna multiplicación ulterior (del tipo de la que fue preciso realizar para las probabilidades de una espada a partir de dos paquetes).

Caso en que se utilizan tres paquetes. Cuando se tienen tres paquetes de cartas pueden obtenerse: cero espadas, una espada, dos espadas, tres espadas y cuatro espadas (referencias 3.1, 3.2, 3.3, 3.4).

Si se trata de cero espadas obtenibles a partir de tres paquetes (3.1), puede observarse que sólo existe un esquema posible (referencias 3.11 y 3.12) (I-o, II-o, III-o).

Si se trata de una espada obtenible a partir de tres paquetes (3.2), puede observarse que la espada puede proceder del primero, del segundo o del tercer paquete (referencias 3.221, 3.222, 3.223). De ahí que la probabilidad total obtenida (referencia 3.24) según el procedimiento seguido en líneas anteriores, haya de multiplicarse por 3 (número de esquemas posibles) (referencia 3.25).

Cuando se trata de dos espadas obtenibles a partir de tres paquetes (3.3), esas dos espadas pueden proceder: del primero y del segundo paquetes (3.321), o del primero y del tercero (3.322) o del segundo y del tercero (3.323). Es decir que hay tres esquemas posibles de obtención de dos espadas a partir de tres paquetes de cartas.

Consiguientemente, la probabilidad total obtenida (referencia 3.34) habrá de multiplicarse por 3 (tal como en el caso anterior, por ser también en éste tres los esquemas posibles a los que puede corresponder esa probabilidad total).

Finalmente, si se trata de obtener tres espadas a partir de tres paquetes (referencia 3.4) podrá observarse que hay un solo esquema posible (I-x, II-x, III-x) y que, por lo tanto, la probabilidad total obtenida para el esquema no tiene que multiplicarse por ninguna cantidad (referencia 3.45).

El paso del problema representado por un solo paquete al que representaba el manejar dos paquetes nos sirvió para poner de relieve la forma en que en las probabilidades correspondientes a cada paquete repercutía la condición de no repetición de las cartas, impuesta por el problema. El paso del problema que representa manejar dos paquetes al que representa utilizar tres paquetes nos sirvió para poner de relieve algo que ya estaba embrionariamente presente en el uso de dos paquetes, en la posibilidad intermedia (de 1 espada obtenida a partir de 2 paquetes). En efecto, siempre que no se trata de obtener cero espadas o n espadas a partir de n paquetes, hay varios esquemas posibles, pues las n-m espadas que hay que obtener pueden proceder indistintamente de cualquiera de los paquetes. En tales casos, la probabilidad total que corresponde a cada esquema (y que es igual para todos los esquemas en los que interviene el mismo número de espadas) necesita multiplicarse por el número de esquemas posibles).

Es fácil comprender, a esta luz, que en cada caso, habrá necesidad de multiplicar la probabilidad total por el número de combinaciones de n (número de paquetes utilizados) en n-m (total de espadas que se pretenden obtener de esos paquetes).

Con el fin de manejar conjuntamente todos estos elementos y de poner las bases para su generalización, consideraremos, en forma final, el problema consistente en obtener 0, 1, 2, 3, 4 espadas a partir de 4 paquetes, dentro de las condiciones especificadas al principio, o sea, las que imponen que toda carta sacada de un paquete se elimine del siguiente antes de sacar de éste cualquier carta (o en caso de ser varios, que toda carta sacada en los paquetes anteriores se elimine de los siguientes antes de sacar la carta correspondiente).

Hacia la obtención de la fórmula general de la Hipergeométrica a partir del uso de cuatro paquetes de cartas. Si se usan cuatro paquetes, la probabilidad de obtener cero espadas o sea, de no obtener espadas en ninguno de los paquetes, quedaría representada por el esquema formado por las referencias 4.11 y 4.12.

Para determinar la probabilidad total de este esquema, comenzaremos por determinar las probabilidades parciales correspondientes a cada uno de los paquetes de barajas utilizando el concepto según el cual la probabilidad de que ocurra un acontecimiento (a) de dos complementarios (a y b) equivale a la relación matemática de a con respecto a $a + b$; o sea, utilizando la sinonimia entre "probabilidad" y "frecuencia relativa" (o sea, entre probabilidad y relación matemática o cociente de la frecuencia absoluta entre el efectivo o frecuencia total).

Según esto, las probabilidades por paquete serán las marcadas en la referencia 4.13, pues:

De 52 cartas, 38 no son espadas, o sea que la probabilidad de obtener una espada del primer paquete es de 38 sobre 52.

De 51 cartas restantes (pues 1 queda invalidada por la condición no repetitiva del problema) 37 no son espadas, o sea que la probabilidad del segundo paquete es 37 sobre 51.

De 50 restantes (2 no espadas invalidadas por la condición) 36 no son espadas (pues dos no espadas han sido invalidadas) o sea que la probabilidad es de 36 sobre 50.

De 49 restantes, 35 son no espadas (pues 3 no espadas quedaron invalidadas), lo cual hace que la probabilidad de obtener una carta que no sea espada en el cuarto paquete es de 35 sobre 49.

Como la probabilidad total es igual al producto de las probabilidades parciales, este esquema de distribución de las no espadas tiene por probabilidad total la de la referencia 4.14.

Si representamos por N el número total de cartas que no son espadas en cada paquete, y por T el total de las cartas (espadas y no espadas) que contiene dicho paquete, tendremos que, el primer numerador, 38, está dado por el número total de espadas (N); el segundo numerador por dicho número menos 1 ($37 = 38\text{-}1 = N\text{-}1$); el tercero por dicho número menos 2 ($36 = N\text{-}2$), y el cuarto por dicho número menos 3 (N-3). En forma análoga, los denominadores están dados por: el total de cartas (T), el total de cartas menos 1 (T-1), el total de cartas menos 2 (T-2), el total de cartas menos 3 (T-3). O sea, que la probabilidad total de no obtener espadas (o, mejor, de obtener no-espadas) en los cuatro paquetes puede quedar representada por la fórmula de la referencia 5.1.

Las combinaciones posibles de un esquema del tipo que examinamos (referencias 4.11 y 4.12) estarán dadas por las combinaciones de 4 paquetes tomados de 0 en 0; o bien, de 4 espadas posibles (1 por paquete) tomadas de 0 en 0 (o sean 0 espadas obtenidas realmente). De donde, la probabilidad de obtener 0 espadas con cuatro paquetes de cartas quedará dada por la probabilidad total correspondiente a dicho esquema, multiplicado por el número de combinaciones posibles que pueden producir dicho esquema (1 que es el valor de 4 cosas tomadas de 0 en 0) (referencia 4.15).

Si representamos por P el número de paquetes y por S el número de espadas obtenidas de los cuatro paquetes, obtendremos la fórmula de la referencia 5.2 que da en forma simbólica las posibilidades que hay de obtener S espadas con P paquetes formados por T cartas de los que N es el número de cartas que no son espadas. Referencia 5.2.

Un desarrollo semejante al anterior será el que sigamos para 1, 2, 3 y 4 espadas.

La probabilidad de obtener una espada, de cuatro paquetes de cartas, está dada en la referencia 6. En efecto, las probabilidades por paquete se establecieron con base en las siguientes consideraciones:

De 52 cartas pueden obtenerse 13 espadas.

De las 51 restantes (12 de ellas espadas, pues la 13ª o la 52ª ya salió en el primer paquete) pueden obtenerse 39 no espadas.

De las 50 restantes (12 espadas y 38 no espadas, por haber salido la 39ª, 51ª en el segundo paquete) pueden obtenerse 38 no espadas.

De las 49 restantes (12 espadas y 37 no espadas por haber salido en el segundo y en el tercer paquete la 39ª y la 52ª y la 38ª y 50ª) pueden obtenerse 37 no espadas.

Si se examina la probabilidad total formada por el producto de las probabilidades parciales así obtenidas, puede observarse que el denominador de la probabilidad total (o sea el producto de los denominadores de las probabilidades parciales) se mantiene incambiado en todos los casos ($52 \times 51 \times 50 \times 49$ para cuatro paquetes).

Si E representa el total de espadas por paquete, N sigue representando número de cartas que no son espadas, por paquete, y T total de cartas en cada paquete, se obtiene la fórmula de la referencia 5.3. Si hay alguna duda con respecto a la formación de cada numerador y de cada denominador de la expresión, recuérdese que, para el ejemplo concreto, E representa a 13, N a 39 y T a 52. Obsérvese, de paso, que $13+39=52$ o bien que, en términos simbólicos $E + N = T$, como es lógico.

Pero, el esquema con el que hemos trabajado (referencias 4.21 y 4.22) no es el único posible de obtención de una espada, ya que esa espada única para los cuatro paquetes puede aparecer en el primer paquete, en el segundo, en el tercero o en el cuarto según las posibilidades esquematizadas por las referencias 4.21 y 4.221, 4.222, 4.223 y 4.224). O sea, que hay cuatro esquemas o combinaciones posibles que equivalen a las combinaciones de las cuatro espadas obtenibles de los cuatro paquetes tomadas de 1 en 1 (ya que una es la espada que aparece realmente en cada conjunto). Para mostrar claramente que la probabilidad de una espada puede obtenerse multiplicando dichas combinaciones de 4 en 1 (igual a 4) por la probabilidad total recientemente obtenida, señalaremos en particular las probabilidades totales de estos cuatro esquemas. Referencias 4.21 y 4.241, 4.242, 4.243 y 4.244.

Como hemos hecho observar anteriormente, los denominadores no cambian (son siempre $52 \times 51 \times 50 \times 49$). En cuanto a los numeradores, puede observarse que en la probabilidad total figuran asimismo en el numerador los mismos valores (13, 39, 38, 37) aunque puedan estar colocados en diferentes posiciones. Como un producto no se altera cuando se invierte el orden de los factores, cada una de esas probabilidades específicas puede subsumirse en la expresión genérica dada por la referencia 4.240.

Como la expresión de la referencia 4.240 se presenta 4 veces, o sea, el resultado de las combinaciones de 4 en 1, la probabilidad de obtener una espada de cuatro paquetes de cartas, en las condiciones enunciadas en el problema será el resultado que se obtenga de la expresión dada por la referencia 4.25.

Fuera de lo ya explicado, en la expresión anterior separamos el cociente 13/52 del resto para destacar la contribución de las espadas al total, en contraste con la contribución que a la probabilidad total brindan las no espadas. Cosa análoga haremos en lo subsecuente.

En general, de acuerdo con nuestras convenciones simbológicas, podemos registrar la expresión de la referencia 5.25.

La probabilidad de obtener dos espadas de los cuatro paquetes están consignadas en las referencias de orden 4.3 en las que se consignan: la probabilidad total por esquema (4.34), el número de esquemas posibles (referencias de la 4.321 a la 4.326) y la probabilidad total de obtener dos espadas (referencia 4.35).

En seguida, mediante la sustitución de los valores numéricos por literales, hemos obtenido la probabilidad de sacar dos espadas mediante cuatro paquetes de cartas, dentro de las condiciones especificadas por el problema. En la referencia 5.35 pueden reconocerse: el factor combinatorio que indica el número de esquemas posibles; el factor que permite reconocer la contribución de las espadas a la probabilidad total y el factor que representa la contribución de las cartas que no son espadas a esa misma probabilidad total. En las fórmulas siguientes (referencias 5.45 y 5.55) se dan las probabilidades de obtención de 3 y 4 espadas con 4 paquetes.

Obtención de una fórmula general, que sea independiente del número de paquetes. Para la obtención de la fórmula general partiremos de las fórmulas establecidas para cuatro paquetes. En ellas, podemos observar que el denominador de la fracción es siempre el producto de 4 factores que decrecen de unidad en unidad a partir de T (T, T-1, T-2, T-3), siendo el último factor (T-3) el resultado que se obtiene de restar de T (total de cartas en un paquete) 3, en este caso en que se ha trabajado con 4 paquetes, o sea, en general, el número de paquetes menos uno (P-1). O sea, que el denominador puede representarse, en general por:

$$T\ (T-1)\ (T-2) \ldots (T-[P-1])$$

O, si se ejecutan las operaciones en el último paréntesis, el denominador puede representarse por:

$$T\ (T-1)\ (T-2) \ldots (T-P+1)$$

Al numerador contribuyen dos productos de origen distinto:

1. El producto de los términos que provienen de las espadas que se han obtenido, y
2. El producto de los términos procedentes de las cartas que no son espadas.

Con respecto al producto que originan las espadas:

1. No aparece cuando no hay espadas,
   está formado por un solo factor cuando hay una sola.
   por dos si son dos las espadas,
   por tres si son tres, etcétera.
2. Sus factores decrecen de unidad en unidad a partir de E (total de espadas), y
3. Dichos factores dejan de aparecer cuando el sustraendo de E es igual al número de espadas obtenidas menos 1 (el sustraendo es 0 cuando las espadas son 1, 1 cuando son 2, 2 cuando son 3...).

O sea, que este primer producto constitutivo del numerador puede representarse por:

$$E\ (E-1)\ (E-2) \ldots (E-[S-1])$$

O, si se ejecuta la operación del último paréntesis, por:

$$E\ (E-1)\ (E-2)\ \ldots\ (E-S+1).$$

Con respecto al segundo producto, puede observarse que el mismo se forma:

1. Por una serie de factores decrecientes de unidad en unidad a partir de N (total de las cartas que no son espadas), y

2. Que termina cuando el sustraendo de N es igual al número de espadas obtenidas menos 1 (o sea, que el sustraendo es 3 cuando de las cuatro cartas sacadas de los paquetes ninguna es espada; es 2 cuando, de las 4 sacadas, 1 es espada y 3 no espadas; es 1 cuando de las cuatro sacadas, 2 son espadas y 2 no lo son; cero cuando, de las 4 sacadas, 3 son espadas y 1 no).

O sea, que ese segundo producto constitutivo del numerador, puede representarse por una serie de factores cuyo minuendo sea N y cuyo sustraendo sea el número de no espadas menos 1:

$$N\ (N-1)\ (N-2) \ldots (N-[P-S-1])$$

Expresión en la que P-S equivale al total de cartas sacadas o paquetes (P) menos las espadas que salieron (S), o sea, al total de cartas obtenidas que no fueron espadas.

De acuerdo con todo lo anterior, la expresión general de la probabilidad total de obtener un número S de espadas con P paquetes, cada uno de los cuales tenga un total de T cartas de las cuales E sean espadas y N no lo sean estará dada por la referencia 6.1 o por la 6.2 en la que se han ejecutado las operaciones indicadas dentro del último paréntesis del numerador.

Una expresión más compacta de la probabilidad correspondiente a una distribución hipergeométrica. En la expresión de la referencia 6.2, el primer factor:

E (E-1) ... (E-S+1), equivale a tener:

1. Todos los factores decrecientes de unidad en unidad, desde E hasta 1,
2. Menos todos los factores comprendidos entre (E-S+1) — 1 = E-S, que es el que subseguiría al último, y 1.

Pero,

1. Decir "todos los factores decrecientes de unidad en unidad desde E hasta 1", equivale a tener el "factorial correspondiente" (o sea, en el caso, el factorial E), y
2. Agregar "menos los factores comprendidos de (E-S) hasta 1" vale tanto como decir: "dividido entre el factorial de (E-S)".

En resumen, que este primer factor de la expresión (referencia 6.2) equivale al factorial de E entre el factorial de E-S, conforme la expresión de la referencia 6.3 indica.

El segundo factor de la expresión (referencia 6.2): N (N-1)...(N-P+S+1), por consideraciones análogas, resulta ser igual al cociente que resulta de dividir el factorial de N entre el factorial de (N-P+S+1)—1=(N-P+S). Es decir que el equivalente de este segundo factor de la referencia 6.2 estará dado por la referencia 6.4.

En cuanto al denominador de la referencia 6.2, puede escribirse su equivalente en forma análoga, según se ha hecho en la referencia 6.5.

La sustitución de estas expresiones equivalentes en la original (6.2) de la probabilidad total de una distribución hipergeométrica nos da una serie de factores fraccionarios, de los cuales el último se explica gracias a la referencia 6.6 pues T (T-1)... (T-P+1) figura en la expresión originaria (6.2) en el denominador.

En esta expresión (6.7) podemos hacer el reagrupamiento siguiente:

1. Asociaremos el producto de los numeradores de las dos fracciones centrales (E!N!) con el denominador de la última fracción (T!), y

2. El producto de los denominadores de las dos centrales (E-S)! (N-P+S)! con el numerador de la última fracción (T-P)!

Así obtendremos la expresión 6.8.

Pero, como T es el total de cartas, este total es igual a E+N, o sea la suma del total de las espadas y de las que no son espadas, con lo que la expresión anterior se convierte en la expresión de la referencia 6.9.

Pero, si se recuerda que cuando se divide el factorial de una suma (por ejemplo, el factorial de A) entre el producto de los factoriales de dos sumandos que la formen (entre el producto de los factoriales de B y de A-B, por ejemplo), se obtiene la combinación de A tomada de B en B, o sea $\binom{A}{B}$; podrá observarse que esto ocurre con los tres factores de la expresión 6.9.

Para la primera fracción esto es obvio, pues de ahí se partió y ahí se vuelve; la fracción es el factorial de una suma P (=(P-S)+S) entre el producto de los factoriales de los sumados (P-S) y S. Por lo mismo, es igual a la combinatoria de P en S según indica la referencia 6.91.

Si se considera que la segunda fracción es el recíproco de un quebrado cuyo numerador es el factorial de una suma (E+N) y el denominador el producto de los factoriales de los sumados E y N, se justificará el que, de acuerdo con la expresión 6.92 se escriba como su equivalente el recíproco de la combinatoria de E-N en E.

Con respecto al tercer factor de la expresión 6.9, como T=E+N, puede escribirse en él, en el numerador, en vez de T-P, E+N-P conforme a la referencia 6.931.

Como puede verse fácilmente, E+N-P=(E-S)+(N-P+S), o sea, que el factorial del numerador lo es de la suma de los elementos que figuran factorializados en el denominador; o sea que el tercer factor de la expresión 6.9 puede suplirse por la combinatoria de E+N-P en E-S como lo expresa la referencia 6.932.

De este modo, al sustituir los equivalentes dados en las referencias 6.91, 6.92 y 6.932, se obtiene como expresión de la probabilidad total de una distribución hipergeométrica la consignada en la referencia 7.0. Finalmente, la probabilidad total para una distribución hipergeométrica resulta ser la de la referencia 7.1.

En dicha expresión, los símbolos han representado, originalmente:

P — Paquetes,
S — Espadas por tirada,
E — Espadas por paquete,
N — Cartas que no son espadas, por paquete.

Con fines de tentativa memorística o mnemotécnica de la expresión 7.1 puede observarse que, si se suman entre sí los elementos superiores de las dos combinatorias del numerador y si se hace lo mismo con los elementos inferiores de dichas combinatorias se obtienen, respectivamente, el elemento superior y el inferior de la cobinatoria del denominador.

Si se recuerda que E+N es el total de cartas, la expresión 7.1 también puede expresarse como lo indica la referencia 7.2.

Fórmula de la pendiente relativa en el caso de la hipergeométrica. Comenzaremos por representar por y_x la probabilidad que hay de obtener S espadas. La probabilidad correspondiente quedará dada mediante la aplicación de la fórmula de la hipergeométrica como lo indica la referencia 8.1.

La probabilidad de obtener S+1 espadas en vez de S espadas, la representaremos por y_{x+1} y su valor quedará dado por la expresión de la referencia 8.2.

Al construir esta última fórmula, debe recordarse que, como se dijo anteriormente, en el caso de la hipergeométrica, la suma de los elementos superiores de los factores combinatorios del numerador debe ser igual al elemento superior del elemento combinatorio del denominador, y la suma de los elementos inferiores de los factores combinatorios del numerador debe ser igual al elemento inferior del coeficiente combinatorio del denominador.

Vamos a buscar, en seguida, el equivalente de y_{x+1} en términos de y_x. Para ello, recurriremos a las propiedades de las combinatorias.

Existe una propiedad de las combinatorias, según la cual, si al elemento inferior de un coeficiente combinatorio se le disminuye una unidad, el resultado no se altera cuando se le multiplica por el cociente entre la diferencia de los nuevos elementos y el antiguo elemento inferior. Como para pasar de y_{x+1} a y_x es necesario que en el primer factor combinatorio del numerador se disminuya una unidad al elemento inferior, la propiedad mencionad es aplicable, de acuerdo con lo asentado en la referencia 8.21.

En el caso del segundo factor combinatorio de la 8.2, hay que agregar una unidad al elemento inferior E-S-1 para tener el factor combinatorio correspondiente de la 8.1. De acuerdo con otra propiedad de los coeficientes combinatorios, si al elemento inferior de un coeficiente combinatorio se le agrega una unidad, el resultado no se alterará siempre y cuando se multiplique por el cociente del nuevo elemento inferior dividido entre la diferencia de los antiguos elementos superior e inferior. Es así como puede asentarse la expresión de la referencia 8.22.

Si se sustituyen los resultados de la 8.21 y de la 8.22 en la 8.2 se obtiene la 8.3 que da el valor de y_{x+1} en términos de y_x.

Obtenidos los valores de y_{x+1} y de y_x, determinaremos el incremento entre ambos, que representaremos por Δ_y (Delta mayúscula índice y). Para ello, restaremos del valor de y_{x+1} el de y_x con lo que obtendremos el resultado de 8.41. Al sacar de la 8.41 como factor común a y_x se obtiene la 8.42.

Para obtener el valor de $y_{x+.5}$, que constituirá el denominador de la pendiente, tendremos que sumar los valores de y_x y de y_{x+1} dados por la 8.1 y la 8.3 y tomar la mitad. El resultado se consigna en la referencia.

Si se toma la relación de Δ_y con respecto a $y_{x+.5}$ se obtendrá la expresión 8.06.

Como puede observarse, para establecer la relación en las expresiones originarias que llegaron a formar numerador y denominador: se redujeron, dentro de los corchetes, los enteros con las fracciones, quedando como denominador común de todas las expresiones: (S+1) (N-P+S+1). Como dicho denominador aparece tanto en la expresión numeradora como en la denominadora, acabó por reducirse a la unidad. Lo mismo ocurre con y_x en la expresión 8.6 puesto que figura como factor del numerador y del denominador. Por otra parte el .5 (que equivale a un denominador 2) en el denominador puede pasar como factor 2 al numerador, con lo cual se tiene la expresión 8.7.

Si se obtienen los productos indicados, se obtiene la expresión 8.8. Al eliminar términos semejantes iguales y de distinto signo (-PS y SP, $+S^2$ y $-S^2$) en el numerador y agrupar todos los términos que contienen S en numerador y en denominador, para sacar esta literal como factor común, se obtiene la expresión 8.9. Al sustituir E+N por su valor T, se obtiene la 9. La división de todo el numerador entre 2 (T+2) equivale a la reducción del factor 2 a la unidad y a la división entre (T+2), lo cual da para el numerador la expresión 9.1. Si en esa expresión hacemos $S=x-\frac{1}{2}$, obtendremos la 9.2. Si agregamos una unidad a la expresión de dentro de los corchetes, obtendremos la 9.3. Pero, en el numerador de esta expresión figuran -N y+T, y T-N es igual a E que sustituido produce la 9.4. Sacando como factor común a P, y después a E+1 se obtienen las expresiones de la referencia 9.5.

En la expresión 9.5 puede observarse que existe un término en x y que todo lo restante [(P+1) (E+1) / (T+2 — 1/2] puede considerarse como un término independiente de x que, por lo mismo, puede representarse por una literal de las que es costumbre utilizar para las constantes (a por ejemplo).

De acuerdo con todo lo anterior, el numerador de la pendiente de la hipergeométrica puede representarse por: $x + a$.

Con respecto al denominador de la expresión originaria transcrito en la 9.6 en donde hay un principio de agrupación (según las potencias de S), si se sustituye S por $x - \frac{1}{2}$ como en el caso anterior, se tienen las transformaciones recogidas en la referencia 9.7.

De los desarrollos anteriores, se recogen términos en x^2, términos en x y términos independientes de x como puede verse por la referencia 9.8.

De acuerdo con todo lo anterior, se pone de manifiesto que el denominador puede expresarse como un polinomio de segundo grado en x; o sea, que si designamos por b_2, b_1, b_0 los coeficientes de las segundas, primeras y cero potencias de x, el denominador puede quedar representado por la 9.9.

Si se sustituyen en la expresión de la pendiente estos valores (numerador igual a $x + a$ y denominador igual a $b_0 + b_1x + b_2x^2$), toda la serie anterior de igualdades desemboca en el siguiente miembro, dado por la referencia 10. Como el primer miembro de la ecuación puede representarse como el recíproco de y multiplicado por la derivada de y en x, puede tomarse, como forma final de la referencia 10:

$$\frac{1}{y} D_x y = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Como punto de partida del sistema pearsoniano de curvas de frecuencia.

Relación genérica entre los parámetros de la ecuación de Pearson y los momentos de la distribución. Comenzaremos por dar a la expresión la forma transcrita en la referencia 11.

Al pasarla y que figura como denominador en el primer miembro como factor del segundo miembro, y hacer lo propio con d x y pasar el denominador del segundo como factor del primer miembro, se obtiene la expresión 11.1.

Si se multiplican ambos miembros por x a la enésima potencia (x^n) se obtiene la 11.2.

Si se integran ambos miembros de la ecuación, esta no se altera como lo muestra la 11.3. Nos ocuparemos sucesivamente de la integración de cada miembro.

La integral del primer miembro puede obtenerse mediante integración por partes, si se considera a $x^n(b_0 + b_1x + b_2x^2)$ como la primera parte y a dy como la segunda, y se recuerda que la fórmula para la integración por partes es $\int u dv = uv - \int v du$. Según eso, del primer miembro se sacan las igualdades de la referencia 11.4.

En el último miembro de la expresión 11.4 se ha multiplicado el x^n de fuera del paréntesis por todos y cada uno de los términos de dentro del mismo. Para obtener los diferenciales de los términos obtenidos mediante esta multiplicación, en cuanto se trata de productos en los que figuran potencias de la variable será necesario multiplicar cada exponente por el coeficiente y por la variable elevada al exponente disminuido en una unidad, según regla bien conocida, lo cual produce la 11.5.

Pero, si al final de la curva el primer término (el no sujeto a integración) se desvanece, el primer término de la expresión 11.3 quedará reducido a lo expresado en la referencia 11.6 o bien a lo consignado en la 11.7 obtenida al multiplicar cada término de dentro del paréntesis por la y de fuera de él. Esta expresión, a su vez, en cuanto integral de una suma, puede descomponerse en una suma de integrales como la contenida por la referencia 11.8.

Si se considera que en cada uno de estos términos hay factores constantes como nb_0, $(n+1)b_1$, $(n+2)b_2$ que pueden salir sin alterarse fuera del signo de integración, podremos reconocer el factor integral de cada término:

$$\int x^{n-1}y\,dy, \qquad \int x^n y\,dy, \qquad \int x^{n+1}y\,dy$$

Estos integrales (en series discontinua equivaldrían a sumatorias) de potencias ($n-1$, n $n+1$) de variables (x) ponderadas por frecuencia (y) nos permiten reconocer el esquema clásico de los momentos de una distribución.

De este modo, en la 11.8, en vez de esos factores integrales de los tres términos, pueden escribirse los momentos de orden $n-1$, de orden n y de orden $n+1$ que representaremos por sus minúsculas griegas afectadas de los subíndices correspondientes. De este modo, todo el primer término de la ecuación originaria (único del que nos hemos ocupado por el momento) se reduce a la referencia 11.9.

Con respecto al segundo miembro de la ecuación (referencia 12), puede realizarse, en primer término, la multiplicación de los factores de fuera del paréntesis por los términos del factor entre paréntesis (referencia 12.1). Pero, la integral de la suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos (referencia 12.2). En estos términos integrales del segundo miembro de la ecuación, puede reconocerse asimismo el esquema clásico de los momentos. De ahí que los dos términos anteriores puedan reemplazarse por momentos (referencia 12.3).

La restitución de los valores obtenidos en la 11.9 y en la 12.3 en la ecuación dada por la referencia 11.3, nos permite establecer una fórmula general que rige las relaciones entre los parámetros de la pendiente del sistema de Pearson y los momentos de la distribución. Esta relación queda dada en la referencia 13.

El paso de n' al primer miembro, con signo contrario, y el cambio ulterior de todos los signos de los términos de la ecuación produce la 14 a la que consideramos como expresión general definitiva de las relaciones entre los parámetros de la pendiente del sistema pearsoniano y los momentos de la distribución.

Valor de los parámetros de la expresión de Pearson en términos de los momentos. Para encontrar el valor de los parámetros del sistema de Pearson en términos de los momentos:

1º Daremos a la n de la expresión 14, sucesivamente, los valores cero, uno, dos, tres, etcétera.

2º Formaremos, con la serie de ecuaciones obtenidas (referencia 15) un sistema que tendrá tantas ecuaciones como incógnitas (parámetros b).
3º Transformaremos las expresiones a fin de tener momentos no con respecto a una media arbitraria sino con respecto a la media aritmética.
4º Resolveremos el sistema resultante.

Los momentos que figuran en el sistema de ecuaciones dada por la referencia 15, son momentos con respecto a la media arbitraria. Si esa media arbitraria coincide con la media aritmética, los momentos lo serán con respecto a la media aritmética y, consiguientemente, el primero de ellos, según una propiedad bien conocida, se anulará (o sea, que $\mu'_1 = 0$) anulando con ello todos los términos de las ecuaciones anteriores en que parezca. Por su parte, el momento de orden cero, según es sabido, es igual a 1. Según esto, el sistema de ecuaciones de la referencia 15 se transforma en el sistema de la referencia 16, de donde se pueden obtener los parámetros como ha de verse en seguida para diferentes casos concretos.

Si, además, introducimos la modificación consistente en considerar los momentos con respecto a la media aritmética, pero no en unidades originarias, sino en unidades "sigmáticas", se tendrán las ecuaciones de la referencia 17 (en donde la flecha → debe leerse "se convierte en" y no "tiende a").

Puesto que nos proponemos examinar más de cerca el sistema de curvas simétricas exclusivamente, tendremos que considerar el caso en que la asimetría es nula, o sea aquel en la que medida beta índice uno de Pearson (o nuestra gamma minúscula sub-índice tres) vale cero. Esto introduce en el sistema las transformaciones de la referencia 18, la cual nos hace ver que las primeras ecuaciones del sistema no cambian, pero sí las dos últimas.

De la referencia 18.1, se puede deducir que el parámetro alfa minúscula es el simétrico de beta minúscula índice uno (referencia 19.1); de la 18.2 se deduce el valor de beta índice cero, en función de beta índice dos (referencia 19.2); de la 18.3, el que beta índice uno es nula (referencia 19.31 y 19.32) gracias a la sustitución en la 18.3 del valor de alfa minúscula tomado de la 19.1, concluyéndose que alfa minúscula también es nula; de la 18.4 puede deducirse asimismo el valor de beta índice dos, para el subsistema de curvas simétricas (referencia 19.43).

La sustitución del valor de beta índice dos obtenido en la referencia 19.43, en el equivalente de beta índice cero dado por la referencia 19.2 da el correspondiente valor del parámetro beta índice cero. Estos son los dos únicos parámetros necesarios para especificar el subsistema de curvas simétricas.

Expresión general del subsistema de curvas simétricas. La pendiente de la hipergeométrica y la expresión general del sistema de curvas de frecuencia en términos de desviaciones con respecto a la media aritmética en unidades de la desviación cuadrática media, queda dado por la expresión de la referencia 20, que es afín de la expresión dada por la referencia 10. Delta minúscula cumple, en la 20, la función que x cumplía en la 10; alfa minúscula la que cumplía a minúscula; las betas minúsculas las funciones correspondientes a las bes minúsculas.

Pero, como beta minúscula índice uno es nula en el subsistema de curvas simétricas, según quedó asentado en la referencia 19.32, y alfa minúscula es asimismo nula en dicho sistema, la expresión se simplifica (referencia 20.1). Tal es la expresión derivada, genérica, del subsistema de curvas simétricas.

Si se integra la expresión derivada genérica y se representan por D las dos raíces iguales de la ecuación de segundo grado que puede formarse con el denominador, se tiene la expresión 20.2. Si el factor 1 sobre dos veces beta minúscula índice dos $(1/_2)$ se designa por a, y se toman los antilogaritmos del primero y del segundo miembro de la expresión, se obtiene la referencia 20.3 en la cual, la constante del segundo miembro de la expresión derivada aparece como la exponencial e elevada a la constante y, ulteriormente (referencia 20.4) como y'. El factor de fuera del paréntesis del segundo miembro (que convinimos en representar por a) aparece en la expresión antilogarítmica, como exponente del producto (que, en la expresión antilogarítmica, corresponde a la suma de los logaritmos de delta más D y delta menos D, que aparecían en la logarítmica). Como el producto de delta más D por delta menos D la diferencia de los cuadrados correspondientes de delta y de D, es posible escribir la expresión 20.4 que puede escribirse también en la forma dada por la (referencia 21.1) tema de curvas simétricas.

Obtención del parámetro y' en el subsistema de curvas simétricas. Si se integra la expresión 20.4 que puede escribirse también en la forma dada por la (referencia 21.1) (por simple división entre D^2, dentro del paréntesis, y ulterior multiplicación del resultado por D^2 elevada a la a que es el exponente del paréntesis), se obtiene el efectivo de la distribución, que representaremos por la suma (sigma mayúscula Σ) de las frecuencias (f). La integración habría de extenderse de menos infinito a más infinito, pero, como la expresión es simétrica, dicha integral puede sustituirse por el doble (2) de la integral que se extienda de cero a infinito, como la expresa la (referencia 21.2), en la que 8, expresa que el referente de la integración es la variable delta minúscula.

Para integrar, cambiaremos variable de acuerdo con la 21.3. Es decir a 1 menos el cociente de los cuadrados de delta minúscula y de D, lo representaremos por z. En seguida, buscaremos las equivalencias de los límites (referencia 21.31), de la parte no diferencial del integrando (referencia 21.32) y de la parte diferencial del mismo (referencia 21.33).

Si sustituimos los resultados de las referencias 21.311, 21.312, 21.32 y 21.335 en la expresión 21.2 obtendremos la referencia 21.4, una vez que las constantes han sido sacadas del integrador.

El integrador, en estas condiciones, queda reducido a:

Una integral definida entre cero y uno	$(\int_0^1)$
de una variable	(z)
elevada a un exponente constante	(a)
y multiplicada por el complemento a 1, de dicha variable	(1—z)
elevado dicho complemento a otra constante	$(-1/_2)$
estando referida toda la integral a la variable z	(dz)

Lo anterior es una función típica que se conoce como la función "beta mayúscula" (B) de los exponentes (a y —1/2), incrementados (cada uno) en una unidad (o sea, B de a+1 y de —1/2 más 1). Es decir, que todo el integral de la referencia 21.4 puede representarse por B [(a + 1, (1/2)]

Pero, la función beta mayúscula de dos constantes b y c es igual a otra función característica (designada con gamma mayúscula Γ) de la primera constante (Γ b) por la función gamma de la segunda (Γ c) dividida entre la función gamma de la summa de las constantes (Γ (b + c)). En el caso concreto, la función beta de a + 1 y de 1/2 puede sustituirse por el producto de gamma de a + 1 por gamma de un medio, dividido todo entre gamma de a + 1 más un medio, o gamma de a más uno y medio. Esta sustitución se ha hecho en la referencia 21.6.

Como la función gamma de un medio es igual a la raíz cuadrada de pi minúscula ($\sqrt{\pi}$), es posible escribir la referencia 21.7, y si de ella se despeja a y' se obtendrá la 21.8 que contiene la fórmula del parámetro y' en su forma genérica para el subsistema de curvas simétricas que examinamos.

Procedimiento para la interpolación de una curva del subsistema simétrico de la sistematización de Pearson. De acuerdo con los anteriores desarrollos, el procedimiento básico para interpolar una curva simétrica de este sistema, consiste, por tanto en:

1. Comprobar que no hay asimetría o la asimetría es muy pequeña, para lo cual conviene calcular el valor de gamma índice tres (tercer momento sigmático) o sea, el resultante de dividir el tercer momento no sigmático entre el cubo de sigma; o el que se obtiene al transformar los datos originales en unidades sigmáticas y calcular el tercer momento.
2. Obtener el valor del parámetro básico gamma índice cuatro (en forma análoga).
3. Sustituir el valor de gamma cuatro en las fórmulas de D, a, y'
4. Sustituir los valores de los parámetros D.A.y' en la fórmula genérica del subsistema de curvas simétricas.
5. Calcular los valores teóricos de las frecuencias, dando valores a delta minúscula en la expresión específica de la curva recién encontrada.

Modificaciones que conviene introducir en las fórmulas cuando Gamma 4 es mayor que 3. Cuando gamma índice cuatro es mayor que tres, gamma cuatro, menos 3, es mayor que cero (es positiva); $5_4 - 9$ es mayor que 6 y, por tanto, también positivo. El cociente de ambos es positivo y el simétrico de dicho cociente es negativo (ver referencia 22, de 22.1 a 22.5). O sea que B_2 (equivalente de dicho simétrico) será también negativo.

Cuando gamma índice cuatro es mayor que tres, también es cierto que su duplo (referencia 22.6) es mayor que 6 y, por consiguiente, positivo. Este valor dividido entre $5_4 - 9$, que como vimos antes es positivo, da un cociente positivo, cuyo simétrico (referencia 22.9) es negativo. O sea, que B_0 (equivalente de dicho simétrico) también es negativo.

Como B_0 y B_2 son negativos, tienen el mismo signo, y al dividirse uno entre otro producen un cociente positivo. El simétrico de dicho cociente (referencia 23.2) es negativo. Como ese simétrico es igual al parámetro D al cuadrado, dicho cuadrado de D será igualmente negativo (referencia 24.1). Por otra parte, como el parámetro a es igual a la mitad del recíproco de B_2 y B_2 es negativo, a será igualmente negativo (referencia 24.2).

Si en la fórmula general del subsistema de curvas simétricas consideramos que D al cuadrado es negativo, dicho valor (que aparece como sustraendo en la fórmula genérica) puede aparecer afectado del signo más. Por otra parte, en esa misma fórmula, por las consideraciones precedentes, a (que aparece como exponente) puede aparecer en dicha fórmula, para el caso específico que tratamos (gamma cuatro mayor que 3) con signo negativo. De este modo se obtiene la referencia 25 que da la forma específica de la fórmula cuando gamma cuatro, o sea el índice de curtosis, aplanamiento o picudez es mayor que 3 (es decir, cuando la curva es picuda o leptocúrtica).

El parámetro y' del subsistema de curvas asimétricas cuando gamma cuatro es mayor que 3. Cuando gamma cuatro es mayor que 3, la aplicación directa de la fórmula genérica de las curvas simétricas al caso específico no representa grandes problemas; en cambio, los problemas si son de alguna consideración en cuanto se trata de aplicar la fórmula genérica del parámetro y' en dicho caso específico. De ahí que convenga obtener una fórmula también específica para dicho parámetro cuando se trata de curvas leptocúrticas (o sea aquellas en las que gamma es mayor que 3).

El modo de obtener la fórmula correspondiente es del todo análoga a la manera en que se obtuvo la fórmula genérica para y'. Se parte de la nueva expresión dada por la referencia 25. En el momento de cambiar de variable, sin embargo, se sustituye $1 + \frac{\delta^2}{D^2}$ (uno más el cociente del cuadrado de delta minúscula entre D) por $1/z$ ó z^{-1} (uno sobre zeta, zeta a la menos uno, o el recíproco de z). La serie de igualdades que subsiguen, deducidas de esta referencia 26 permiten establecer los equivalentes de: los límites de la integración (referencia 26.31); de la parte no diferencial del integrando (referencia 26.32) y de la parte diferencial del mismo (referencia 26.33).

La sustitución de los valores encontrados permite establecr, mdiante su sustitución en la referencia 26.2, la referencia 26.4. Si de esta expresión se saca la constante D del integrador y se obtiene el producto de z elevado a la a por z elevada a menos uno y medio, se obtiene la 25.5.

La parte integral de la 26.5 es:

Una integral definida entre cero y uno	$(\int_0^1)$
cuyo integrando está constituido por el producto de una variable	(z)
elevada a una constante	$(a - 1\frac{1}{2})$
y el complemento a 1, de dicha variable	$(1 - z)$
elevado a otra constante	$(-1/2)$
siendo el referente de la integración la variable z	(dz)
Esta expresión, bien característica, se conoce como la función beta mayúscula de los exponentes de z y de 1 — z incrementados, cada uno, en una unidad	$B\ (a - \frac{1}{2}), (\frac{1}{2})$

Como la función beta mayúscula de dos constantes es igual al producto de las funciones gamma mayúscula de cada una de esas constantes, dividido entre la función gamma mayúscula de la suma de dichas constantes, la anterior expresión resulta ser igual a la función gamma de a menos un medio por la función gamma de un medio dividido todo entre la función gamma de la suma de a menos un medio más un medio, o sea, entre la función gamma de a.

Al despejar a y' en la 26.6 se obtiene la 26.7. La sustitución de la función beta en términos de gammas (de acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior) produce la fórmula 26.8 que es la que buscamos. Si se tiene en cuenta, además, que gamma de un medio es igual a la raíz cuadrada de pi, se tendrá la 26.7, que puede aplicarse directamente cuando gamma minúscula subíndice cuatro es mayor que 3.

Para la aplicación del subsistema de curvas simétricas de la sistematización pearsoniana, hemos tomado una distribución (hipotética) por edades, de las mujeres menores de 60 años en un lugar imaginario (Kalabá). Aunque la distribución es hipotética y hemos buscado ceñirnos a las necesidades de la difusión pedagógica del sistema, la misma no está muy lejana de la distribución real por edades de las mujeres noruegas, hacia 1948 de acuerdo con los datos del *Anuario de las Naciones Unidas* de dicha fecha, citado por Woytinsky en su *World Population and Production, Trends and Outlook*. The 20th Century Fund. New York, 1953, cuadro 27, p. 62.

CURVA HIPERGEOMÉTRICA Y SISTEMA PEARSONIANO

Referencia 1. Utilización de un solo paquete.

1.1 Probabilidad de obtener cero espadas en el paquete.

1.11 Paquete I

1.12 Espadas o

1.13 Probabilidad $\frac{39}{52}$

1.2 Probabilidad de obtener una espada en el paquete.

1.21 Paquete I

1.22 Espadas x

1.23 Probabilidad $\frac{13}{52}$

Referencia 2. Utilización de dos paquetes de cartas.

2.1 Probabilidad de obtener cero espadas en ambos paquetes.

2.11 Paquetes	I	II
2.12 Espadas	o	o
2.13 Probabilidad	$\frac{39}{52}$	$\frac{38}{51}$

2.14 Probabilidad total

$$\frac{39}{52} \times \frac{38}{51}$$

2.2 Probabilidad de obtener una espada de uno cualquiera de los paquetes.

2.211 Paquetes	I	II	2.212	I	II
2.221 Espadas	x	o	2.222	o	x
2.231 Probabilidad	$\frac{13}{52}$	$\frac{39}{51}$	2.232	$\frac{39}{52}$	$\frac{13}{51}$
2.241 P. Total	$\frac{13}{52} \times \frac{39}{51}$		2.242	$\frac{39}{52} \times \frac{13}{51}$	

2.25 Probabilidad de obtener 1 espada de uno de dos paquetes:

$$2 \times \frac{13 \times 39}{52 \times 51}$$

Referencia 2. 2.3 Probabilidad de obtener dos espadas con dos paquetes.

2.31 Paquetes	I	II
2.32 Espadas	x	x
2.33 Probabilidad	$\frac{13}{52}$	$\frac{12}{51}$
2.34 P. Total	$\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}$	

Referencia 3. Utilización de tres paquetes de cartas.

3.1 Probabilidad de obtener cero espadas en los tres paquetes.

3.11 Paquetes	I	II	III
3.12 Espadas	o	o	o
3.13 Probabilidad	$\frac{39}{52}$	$\frac{38}{51}$	$\frac{37}{50}$
3.14 P. Total	$\frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50}$		

3.2 Probabilidad de obtener una espada de los tres paquetes:

3.211 Paquetes	I	II	III	3.212	I	II	III
3.221 Espadas	x	o	o	3.222	o	x	o
3.231 Probabilidad	$\frac{13}{52}$	$\frac{39}{51}$	$\frac{38}{50}$				
3.241 P. Total	$\frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{38}{50}$						

3.25 Probabilidad de obtener 1 espada de 3 paquetes:

$$3 \times \frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{38}{50}$$

3.3 Probabilidad de obtener dos espadas de los tres paquetes.

3.311 P.	I	II	III	3.312	I	II	III	3.313	I	II	III
3.321 E.	x	x	o		x	o	x		o	x	x
3.331 Prob.	$\frac{13}{52}$	$\frac{12}{51}$	$\frac{39}{50}$								
3.34 P. Tot.	$\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{39}{50}$										

3.35 Probabilidad de obtener dos espadas de los tres paquetes:

$$3 \times \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{39}{50}$$

3.4 Probabilidad de obtener 3 espadas de los tres paquetes

$$1 \times \frac{13 \times 12 \times 11}{52 \times 51 \times 50}$$

HACIA LA FORMULA GENERAL DE LA HIPERGEOMÉTRICA

Referencia 4. Probabilidad de obtener cero espadas:

4.11 Paquetes I II III IV

4.12 Espadas o o o o

4.13 Probabilidad por paquete:

$$\frac{38}{52} \quad \frac{37}{51} \quad \frac{36}{50} \quad \frac{35}{49}$$

Probabilidad total, igual al producto de las parciales:

$$\frac{38 \times 37 \times 36 \times 35}{52 \times 51 \times 50 \times 49}$$

Referencia 5. 5.1 Probabilidad total de no obtener espadas, en forma literal:

$$\frac{N}{T} \times \frac{N-1}{T-1} \times \frac{N-2}{T-2} \times \frac{N-3}{T-3}$$

4.15 Probabilidad de obtener 0 espadas con cuatro paquetes:

$$\binom{4}{0} \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50} \times \frac{36}{49}$$

5.2 Probabilidad total de no obtener espadas, dada en forma literal

$$\binom{P}{S} \frac{N}{T} \times \frac{N-1}{T-1} \times \frac{N-2}{T-2} \times \frac{N-3}{T-3}$$

4.2 Probabilidad de obtener una espada de los cuatro paquetes:

4.21 Paquetes I II III IV

4.22 Espadas x o o o

4.23 P. parciales $\frac{13}{52} \quad \frac{39}{51} \quad \frac{38}{50} \quad \frac{37}{49}$

4.24 P. total $\frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{38}{50} \times \frac{37}{49}$

5.3 Probabilidad total de obtener una espada de uno de los cuatro paquetes, dada en forma literal:

$$\frac{E}{T} \times \frac{N}{T-1} \times \frac{N-1}{T-2} \times \frac{N-2}{T-3}$$

4.21 Esquemas posibles de obtención de una espada de cuatro paquetes.

4.22

4.21 Paquetes	I	II	III	IV
4.22 Espadas (x)				
4.221 1er. esquema	x	o	o	o
4.22 2o. esquema	o	x	o	o
4.223 3er. esquema	o	o	x	o
4.224 4o. esquema	o	o	o	x

4.24 Probabilidades totales de cada esquema.

4.21 Paquetes: I II III IV

4.24 Probabilidades totales de cada esquema:

4.21 Paquetes: I II III IIII

4.241 Prob. total

del primero $\frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{38}{50} \times \frac{37}{49}$

4.242 del segundo $\frac{39}{52} \times \frac{13}{51} \times \frac{38}{50} \times \frac{37}{49}$

4.243 del tercero $\frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{13}{50} \times \frac{37}{49}$

4.244 del cuarto $\frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50} \times \frac{36}{49}$

4.240 Subsunción de las expresiones específicas en una genérica:

$$\frac{13 \times 39 \times 38 \times 37}{52 \times 51 \times 50 \times 49}$$

4.25 Probabilidad total de obtener 1 espada de cualquiera de los cuatro paquetes:

$$\binom{4}{1} \frac{13}{52} \times \frac{39 \times 38 \times 37}{51 \times 50 \times 49}$$

5.25 Probabilidad total de obtener una espada de cualquiera de los cuatro paquetes, dada en forma literal.

$$\binom{P}{S} \frac{E}{T} \quad \frac{N(N-1)(N-2)}{(T-1)(T-2)(T-3)}$$

4.3 Probabilidad de obtener dos espadas de los cuatro paquetes

4.31 Probabilidad total por esquema:

$$\frac{13 \times 12}{52 \times 51} \times \frac{39 \times 38}{50 \times 49}$$

Contribución respectiva de las espadas y las no espadas.

4.320 Esquemas posibles:

	I	II	III	IV
4.321	x	x	o	o
4.322	o	x	x	o
4.323	o	o	x	x
4.324	x	o	x	o
4.325	o	x	o	x
4.326	x	o	o	x

4.320 Esquemas posibles:

$$6 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ \ 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

4.35 Probabilidad total de obtener dos espadas de dos cualquiera de los cuatro paquetes:

$$\binom{4}{2} \frac{13 \times 12}{52 \times 51} \times \frac{38 \times 37}{60 \times 49}$$

5.35 Probabilidad de obtener dos espadas, en forma literal:

$$\binom{P}{S} \frac{E(E-1)}{T(T-1)} \times \frac{N(N-1)}{(T-2)(T-3)}$$

5.45 Probabilidad de obtener tres espadas:

$$\binom{P}{S} \frac{E(E-1)(E-2)}{T(T-1)(T-2)} \frac{N}{(T-3)}$$

5.55 Probabilidad de obtener cuatro espadas.

$$\binom{P}{S} \frac{E(E-1)(E-2)(E-3)}{T(T-1)(T-2)(T-3)}$$

Referencia 6 Obtención de la fórmula compacta de la hipergeométrica:

6.1

$$\binom{P}{S} \frac{E(E-1)\ldots(E-S+1)N(N-1)\ldots\big(N-(P-S-1)\big)}{T(T-1)\ldots(T-P+1)}$$

6.2

$$\binom{P}{S}\frac{E(E-1)\ldots(E-S+1)\,N(N-1)\ldots(N-P+S+1)}{T(T-1)\ldots(T-P+1)}$$

6.3 $$E(E-1)\ldots(E-S+1)=\frac{E!}{(E-S)!}$$

6.4 $$N(N-1)\ldots(N-P+S+1)=\frac{N!}{(N-P+S)!}$$

6.5 $$T(T-1)\ldots(T-P+1)=\frac{T!}{(T-P)!}$$

6.6 $$\frac{1}{T(T-1)\ldots(T-P+1)}=\frac{(T-P)!}{T!}$$

6.7 $$\frac{P!}{S!(P-S)!}\;\frac{E!}{(E-S)!}\;\frac{N}{(N-P+S)!}\;\frac{(T-P)!}{T!}$$

6.8 $$\frac{P!}{S!(P-S)!}\;\frac{E!\,N!}{(E+N)!}\;\frac{(T-P)!}{(E-S)!\,(N-P+S)!}$$

6.9 $$\frac{P!}{S!(P-S)!}\;\frac{S!\,N!}{(E+N)!}\;\frac{(T-P)!}{(E-S)!\,(N-P+S)!}$$

6.91 $$\frac{P!}{S!(P-S)!}$$

6.92 $$\frac{E!\;N!}{(E+N)!}=\frac{1}{\dfrac{(E-N)!}{E!\;N!}}=\frac{1}{\dbinom{E+N}{E}}=\frac{1}{\dbinom{E+N}{E}}$$

6.931 $$\frac{(T-P)!}{(E-S!\,(N-P+S)!}=\frac{(E+N-P)!}{(E-S)!(NP+S)!}$$

Referencia 7. 6.932, 7 Probabilidad de la Hipergeométrica =

$$\binom{P}{S}\frac{1}{\dbinom{E+N}{E}}\binom{E+N-P}{E-S}$$

7.1 Probabilidad de la Hipergeométrica $$=\frac{\dbinom{P}{S}\dbinom{E+N-P}{E}}{\dbinom{E+N}{E}}$$

7.2 Probabilidad de la Hipergeométrica$=\dfrac{\binom{P}{S}\binom{T-P}{E-S}}{\binom{T}{E}}$

Referencia 8 8.1 Probabilidad de obtener S espadas.

$$y_x = \frac{\binom{P}{S}\binom{E+N-P}{E-S}}{\binom{E+N}{E}}$$

8.2 Probabilidad de obtener S+1 espadas.

$$y_{x+1} = \frac{\binom{P}{S+1}\binom{E+N-P}{E-S-1}}{\binom{E+N}{E}}$$

8.2 Probabilidad de obtener S+1 espadas

8.21 $$\binom{P}{S+1} = \frac{P-S}{S+1}\binom{P}{S}$$

8.22 Transformación de $\binom{E+N-P}{E-S-1}$

Nuevo elemento: E - S

Diferencia de los antiguos: $E + N - P - E + S + 1 =$
$= \quad N - P \quad + S + 1$

De donde:

$$\binom{E+N-P}{E-S-1} = \frac{E-S}{N-P+S+1}\binom{E+N-P}{E-S}$$

8.3 $$y_{x+1} = \frac{P-S}{S-1}\;\frac{E-S}{N-P+S+1}\,y_x$$

8.4 Incremento.

8.41 $$\Delta y = y_{x+1} - y_x$$

8.45 $$\Delta y = \left(\frac{P-S}{S+1}\;\frac{E-S}{N-P+S+1} - 1\right)y_x$$

8.5 Valor de y_{x+5} o probabilidad de x + .5:

$$y_{x+.5} = .5\,(y_x + y_{x+1}) = .5\left(\frac{P-S}{S+1}\;\frac{E-S}{N-P+S+1} + 1\right)y_x$$

8.6 Relación incremental:

$$\frac{\Delta y}{y_{x+.5}} = \frac{(P-S)(E-S)-(S+1)(N-P+S+1)\,y_x}{.5\,(P-S)\,E-S)+(S+1)\,(N-P+S+1)\,y_x}$$

8.61 $$\frac{\Delta y}{y_{x+.5}} = \frac{2\big((P-S)(E-S)-(S+1)(N-P+S+1)\big)}{(P-S)(E-S)+(S+1)(N-P+S+1)}$$

8.62

$$\frac{2\,(PE-PS-ES+S^2-SN+SP-S^2-S-N+P-S-1)}{PE-PS-ES-S^2+SN-SP+S^2+S+N-P+S+1}$$

8.63 $$\frac{2\,[PE+P-N-1-S\,(E+N+2)]}{PE-P+N+1+S\,[(N-E)-2P+2]+2S^2}$$

8.64 $$\frac{2\,[PE+P-N-1-S\,(T+2)\,]}{(PE-P+N+1)+S\,[(N-E)-2P+2]+2S^2}$$

8.641 División entre 2 (T + 2), del numerador:

$$\text{Numerador} = \frac{PE+P-N-1}{T+2} - S$$

8.642 Si $S = x - \frac{1}{2}$

$$\text{Numerador} = \frac{PE+P-N-1}{T+2} - x + \frac{1}{2}$$

8.643 $$\text{Numerador} = \frac{PE+P-N-1+T+2}{T+2} - x - \frac{1}{2}$$

8.644 $$\text{Numerador} = \frac{PE+P+E+1}{T+2} - x - \frac{1}{2}$$

8.645 $$\text{Numerador} = \frac{P\,(E+1)+E+1}{T+2} - x - \frac{1}{2} =$$

8.65 Equivalencia del dominador

$$= \frac{(P+1)\,(E+1)}{T+2} - x - \frac{1}{2}$$

8.646 $$\text{Numerador} = x + a$$

8.65 Equivalencia del dominador

$$(PE-P+N+1)+S[(N-E)-2P+2]+2S^2$$

8.651 Equivalente del término en S^2

$$2\,S^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

8.652 Equivalente del término en S:

$$S\,[(N - E) - 2P + 2] = (x - \frac{1}{2})\,[(N - E) - 2P + 2] =$$

$$= x\,[(N - E) - 2P + 2] - \frac{(N - E) - 2P + 2}{2}$$

8.653 El término independiente de S queda incambiado.

8.6511 Términos en x^2

$$2\,x^2$$

8.6521 Términos en x

$- 2\,x$ (procede del término en S^2)

$x\,[(N - E) - 2P + 2]$

(procede del término en S)

8.6531 Términos independientes de x:

$+\ ^1/_2$ (procede del término en S^2)

$$- \frac{(N - E) - 2P + 2}{2}$$

(procede del término en S).

$PE - P + N + 1$

(procede del término independiente de S)

8.654 Representación simplificada del denominador:

$$a_o + a_1 x + a_2 x^2$$

Referencia 9.

9. Representación del numerador.

Referencia 10.

$$x + a$$

10. Representación de la pendiente:

$$\frac{x + a}{b_o + b_1 x + b_2 x^2}$$

Referencia 11. Expresión general del sistema pearsoniano de curvas de frecuencia;

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x + a}{b_o + b_1 x + b_2 x^2}$$

11.1

$$dy\,(b_0 + b_1x + b_2x^2) = y\,(x + a)\,dx$$

11.2 Multiplicación por x^n

$$x^n\,(b_0 + b_1x + b_2x^2)\,dy = yx^n\,(x + a)\,dx$$

11.3 Integración.

$$\int x^n\,(b_0 + b_1x + b_2x^2)\,dy = \int yx^n\,(x + a)\,dx$$

11.4

$$\int x^n\,(b_0 + b_1x + b_2x^2)\,dy =$$

$$= x^n\,(b_0 + b_1x + b_2x^2)\,y - \int y\,d\,x\Big(x^n\,(b_0 + b_1x + b_2x^2)\Big) =$$

$$= x^n\,(b_0 + b_1x + b_2x^2)\,y - \int yd\,(b_0x^n + b_1x^{n+1} + b_2x^{n+2})$$

11.5

$$x^n\,(b_0 + b_1x + b_2x^2)\,y - \int y\Big(nb_0x^{n-1} + (n + 1)b_1x^n + (n + 2)\,b_2x^{n+1}\Big)dx$$

11.6

$$-\int y\Big(nb_0x^{n-1} + (n + 1)\,b_1x^n + (n + 2)\,b_2x^{n-1}\Big)dx$$

11.7

$$-\int\Big(nb_0x^{n-1}y + (n + 1)\,b_1x^ny + (n + 2)\,b_2x^{n-1}y\Big)\,dx$$

11.8

$$-\int nb_0x^{n-1}ydy - \int (n + 1)\,b_1x^nydy - \int (n + 2)\,b_2x^{n+1}ydy$$

11.9

$$-\,nb_0\mu'_{n-1} - (n + 1)\,b_1\mu'_n - (n + 2)\,b_2\mu'_{n+1}$$

Referencia 12. Segundo miembro de la ecuación.

$$yx^n\,(x + a)\,dx$$

12.1

$$\int (yx^{n+1}dx + yx^nbdx)$$

12.2

$$\int yx^{n+1}dx + \int yx^nadx$$

12.3

$$\mu'_{n+1} + a\mu'_n$$

Referencia 13. Substitución en ambos miembros de la ecuación originaria.

$$-nb_0\mu'_{n-1}-(n+1)b_1\mu'_n-(n+2)b_2\mu'_{n+1}=\mu'_{n+1}+a\mu'_n$$

Referencia 14. Fórmula genérica para la obtención de los parámetros del sistema pearsoniano.

$$a\mu'_n+nb_0\mu'_{n-1}+(n+1)b_1\mu'_n+(n+2)b_2\mu'_{n+1}=-\mu'_{n+1}$$

Referencia 15. Sistema de ecuaciones obtenidas por especificación de la fórmula del sistema pearsoniano.

$$\begin{aligned}
&a\mu'_0+0\,b_0\mu'_{-1}+1\,b_1\mu'_0+2\,b_2\mu'_1=-\mu'_1\\
&a\mu'_1+1\,b_0\mu'_0\quad+2\,b_1\mu'_1+3\,b_2\mu'_2=-\mu'_2\\
&a\mu'_2+2\,b_0\mu'_1\quad+3\,b_1\mu'_2+4\,b_2\mu'_3=-\mu'_3\\
&a\mu'_3+3\,b_0\mu'_2\quad+4\,b_1\mu'_3+5\,b_2\mu'_4=-\mu'_4
\end{aligned}$$

Referencia 16. Simplificación del sistema de ecuaciones obtenidas mediante la especificación de la fórmula.
Empleo de los momentos con respecto a la media aritmética.

$$\mu'_0=1$$

$$\mu'_1-\mu_1=0$$

Transformación de la primera:

$$a+b_1=0$$

Transformación de la segunda:

$$b_0+3\,b_2\mu_2=-\mu_2$$

Transformación de la tercera:

$$a\mu_2+3\,b_1\mu_2+4\,b_2\mu_3=-\mu_3$$

Transformación de la cuarta:

$$a\mu_3+3\,b_0\mu_2+4\,b_1\mu_3+5\,b_2\mu_4=-\mu_4$$

Referencia 17. Empleo de los momentos con respecto a la media aritmética en unidades de la desviación cuadrática media:

$$\mu_2\longrightarrow\gamma_2=\frac{\mu_2}{\sigma^2}=\frac{\mu_2}{\mu_2}=1$$

$$\mu_3\longrightarrow\gamma_3=\sqrt{\frac{\mu_3^2}{\sigma^6}}=\sqrt{\beta_1}\text{ de Pearson}$$

$$\mu_4\longrightarrow\gamma_4=\frac{\mu_4}{\sigma_4}=\beta_2\text{ de Pearson}$$

Transformación de la primera:

$$\alpha + \beta_1 = 0$$

Transformación de la segunda:

$$\beta_0 + 3\,\beta_2 = -1$$

Transformación de la tercera:

$$\alpha + 3\beta_1 + 4\beta_2\gamma_3 = -\gamma_3$$

Transformación de la cuarta:

$$\alpha\gamma_3 + 3\beta_0 + 4\beta_1\gamma_3 + 5\beta_2\gamma_4 = -\gamma_4$$

Referencia 18. Subsistema de curvas simétricas ($\gamma_3 = 0$)

18.1

$$\alpha + \beta_1 = 0$$

18.2

$$\beta_0 + 3\beta_2 = -1$$

18.3

$$\alpha + 3\beta_1 = 0$$

18.4

$$3\beta_0 + 5\beta_2\gamma_4 = -\gamma_4$$

Referencia 19. Despeje de los valores de los parámetros:

19.1

$$\alpha = -\beta_1$$

19.2

$$\beta_0 = -1 - 3\beta_2$$

19.3

19.31

$$\beta_1 - 3\beta_1 = 0$$

19.32

$$-2\beta_1 = 0 \qquad \therefore \beta_1 = 0$$

19.33

$$\therefore \alpha = 0$$

19.4

19.41

$$-3 - 9\beta_2 + 5\beta_2\gamma_4 = -\gamma_4$$

19.42

$$\beta_2(-9 + 5\gamma_4) = -\gamma_4 + 3$$

19.43

$$\beta_2 = \frac{-\gamma_4 + 3}{-9 + 5\gamma_4}$$

$$\beta_2 = -\frac{\gamma_4 + 3}{5\gamma_4 - 9}$$

19.21

$$\beta_0 = -1 - 3\left(-\frac{\gamma_4 + 3}{5\gamma_4 - 9}\right)$$

19.22

$$\beta_0 = -\frac{2\gamma_4}{5\gamma_4 - 9}$$

Referencia 20. Expresión del sistema pearsoniano, en términos de desviaciones respecto a la media aritmética en unidades de la desviación cuadrática media:

$$\frac{D_\delta y}{y} = \frac{\delta + \alpha}{\beta_0 + \beta_1\delta + \beta_2\delta^2}$$

20.1 Expresión del subsistema de curvas simétricas:

$$\frac{D_\delta y}{y} = \frac{\delta}{\beta_0 + \beta_2\delta^2}$$

20.2. Integración:

$$\text{Log } y = \frac{1}{2\beta_2}\left\{\text{Log}(\delta + D) + \text{Log}(\delta - D)\right\} + C$$

20.3. Forma Antilogarítmica:

$$y = \left\{(\delta + D)(\delta - D)\right\}^{a} e^{C} =$$

20.4. Expresión general del Subsistema de Curvas Simétricas.

$$y = y'(\delta^2 - D^2)^a$$

20.5

$$D^2 = \frac{\beta_0}{\beta_2}$$

20.6

$$a = \frac{1}{2\beta_2}$$

Referencia 21. Fórmula del parámetro y' en el Subsistema de Curvas Simétricas.

21.1

$$y = y' D^{2a} \left(1 - \frac{\delta^2}{D^2}\right)^a$$

21.2

$$\Sigma f = 2y' D^{2a} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\delta^2}{D^2}\right)^a d\delta$$

21.3

$$1 - \frac{\delta^2}{D^2} = z$$

21.31

21.311 Si δ infinito , $z = 0$

21.312 Si $\delta = 0$, $z = 1$

21.32

$$\left(1 - \frac{\delta^2}{D^2}\right)^a = z^a$$

21.33

21.331 $D^2 - \delta^2 = D^2 z$

21.332 $-\delta^2 = D^2 (z - 1)$

21.333 $\delta^2 = D^2 (1 - z)$

21.334 $\delta = D (1 - z)^{1/2}$

21.335 $d\delta = \frac{D}{2} (1 - z)^{-1/2} (-1)\, dz$

21.4

$$\Sigma f = y' D^{2a+1} (-1) \int_0^1 z^a (1 - z)^{-1/2} dz$$

21.5

$$\Sigma f = y' D^{2a+1} (-1)\, B\, [(a + 1), (1/2)]$$

21.6

$$\Sigma f = y' D^{a+1} (-1) \frac{\Gamma (a + 1)\, \Gamma (1/2)}{\Gamma (a + 1^1/_2)}$$

21.7

$$\Sigma f = y' D^{2a+1} \frac{\Gamma (a + 1) \sqrt{\pi}}{\Gamma (a + 1\,^1/_2)}$$

21.8

$$y' = \frac{\Sigma f}{D^{2a+1} \sqrt{\pi}} \quad \frac{\Gamma (a + 1\,^1/_2)}{\Gamma (a + 1)}$$

Referencia 22. Modificaciones útiles cuando la curva es leptocúrtica.

22.1

$$\text{Si } \gamma_4 > 3$$

22.2

$$\gamma_4 - 3 > 0$$

22.3

$$5\,\gamma_4 - 9 > 6 > 0$$

22.4

$$\frac{\gamma_4 - 3}{5\,\gamma_4 - 9} > 0$$

22.5

$$-\quad \frac{\gamma_4 - 3}{5\,\gamma_4 - 9} < 0 \quad \therefore\ \beta_2 < 0$$

22.6

$$2\,\gamma_4 > 6$$

22.7 Igual a la 22.3

22.8

$$\frac{2\,\gamma_4}{5\,\gamma_4 - 9} > 0$$

22.9

$$-\quad \frac{2\,\gamma_4}{5\,\gamma_4 - 9} < 0 \quad \therefore\ \beta_o < 0$$

Referencia 23

23.1

$$\frac{\beta_o}{\beta^2} > 0$$

23.2

$$-\frac{\beta_o}{\beta_2} < 0$$

Referencia 24

24.1

$$D^2 < 0$$

24.2

$$a < 0$$

Referencia 25. Fórmula de las curvas simétricas especificada para la simétrica leptocúrtica.

$$y = y' (\delta^2 + D^2)^{-a}$$

Referencia 25. El parámetro y′ en el caso de las curvas simétricas leptocúrticas.

$$y = y' (\delta^2 + D^2)^{-a}$$

Referencia 26.

26.1

$$y = y' (D^2)^{-a} \left(\frac{\delta^2}{D^2} + 1 \right)^{-a}$$

26.2

$$\Sigma f = 2y' (D^{2a}) \int_o^{\infty} \left(1 + \frac{\delta^2}{D^2} \right)^{-a} d\delta.$$

26.3

$$1 + \frac{\delta^2}{D^2} = z^{-1}$$

26.31

26.311 Si δ infinito, $z^{-1} =$ infinito $\therefore z = 0$

26.312 Si $\delta = 0$ $z^{-1} = 1$ $\therefore z = 1$

26.32

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{D^2} \right)^a = (z^{-1})^a = z^a$$

26.33

26.331

$$D^2 + \delta^2 = D^2 z^{-1}$$

26.332

$$\delta^2 = D^2 (z^{-1} - 1)$$

26.333

$$\delta = D (z^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

26.334

$$d\delta = \frac{D}{2} (z^{-1} - 1)^{-} \quad d(z^{-1} - 1) = -\frac{D}{2} \left(\frac{1 - z}{z} \right)^{-1/2} z^{-2} dz =$$

26.33

$$= -\frac{D}{2} \left(\frac{1 - z}{z} \right)^{-1/2} z^{-2} dz = d\delta = -\frac{D}{2} z^{-2 + \frac{1}{2}} (1 - z)^{-1/2} dz$$

26.4

$$\Sigma f = 2y'D^{-2a}\int_0^1 z^a \frac{D}{2} z^{-1/2}(1-z)^{-1/2}dz$$

26.5

$$\Sigma f = y'D^{-2a+1}\int_0^1 z^{a-1\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz$$

26.6

$$\Sigma f = y'D^{-2a+1}B\left[\left(a-1\frac{1}{2}+1\right).\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right]$$

$$\Sigma f = y'D^{-2a+1}B\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

26.7

$$y' = \frac{\Sigma f}{D^{-2a+1}} \frac{1}{B\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]}$$

26.8

$$y = \frac{\Sigma f}{D^{-2a+1}} \frac{\Gamma}{\Gamma\left(a-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

26.9

$$y' = \frac{\Sigma f}{D^{-2a+1}\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a-\frac{1}{2}\right)}$$

APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS DEL SUBSISTEMA SIMÉTRICO

a un ejemplo proporcionado por William Palin Elderton.

El cálculo de γ_4 da 2.548313

$$\gamma_4 - 3 = 2.548313 - 3 = -0.451687$$
$$5\gamma_4 - 9 = 12.741565 - 9 = 3.741565$$
$$2\gamma_4 = 2 \times 2.548313 = 5.096626$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_2 = -\dfrac{\gamma_4 - 3}{5\gamma_4 - 9} = -\dfrac{-0.45687}{3.741565} \\[2ex] \beta_0 = \dfrac{-2\gamma_4}{5\gamma_4 - 9} = \dfrac{-5.096626}{3.741565} \end{array}\right\} D^2 = -\frac{\beta_0}{\beta_2} = -\frac{-5.096627}{0.451687}$$

$$D^2 = +11.28$$

$$a = \frac{1}{2\beta_2} = \frac{3.741565}{.451687 \times 2} = \frac{3.741565}{0.903374} = 4.14$$

$$y' = \frac{\Sigma f}{D^{2a+1}\sqrt{\pi}} \quad \frac{\Gamma(a+1.5)}{\Gamma(a+1)}, = \frac{1683}{11.28^{4.64}3.14} \quad \frac{\Gamma(5.64)}{\Gamma(5.14)}$$

$11.28^{4.64}$ se calcula mediante logaritmos = Antilog [4.64 log. 11.28]

$$\Gamma(5.64) = 4.64\,\Gamma(4.64) = 4.64 \times 3.64\,\Gamma(3.64)$$
$$= 4.64 \times 3.64 \times 2.64\,\Gamma(2.64) =$$
$$= 4.64 \times 3.64 \times 2.64 \times 1.64\,\Gamma(1.64) = 4.64 \times 3.64 = 2.64$$
$$= 1.64 \times .89864$$

$$\Gamma(5.14) = 4.14 \times 3.14 \times 2.14 \times 1.14\,\Gamma(1.14) =$$
$$= 4.14 \times 3.14 \times 2.14 \times 1.14 \times .93642$$

Los valores de $\Gamma(1.64)$ y de $\Gamma(1.14)$ se obtuvieron de las tablas de la función gamma que se extienden de gamma de 1 a gamma de 1.99.

TRANSFORMACIÓN DE LA FÓRMULA DEL SUBSISTEMA PARA FINES PRÁCTICOS

La fórmula del subsistema asimétrico del Sistema Pearsoniano

$$y = y' (\delta^2 - D^2)^a$$

puede transformarse en una más fácil de manejar en la práctica.

Si se divide la expresión de dentro del paréntesis entre D^2 y se cambia signo, dicha expresión se convierte en $1 - \delta^2/D^2$.

Al dividir la expresión de dentro del paréntisis entre D^2 quedó dividido todo el segundo miembro entre D^{2a}. Para que el segundo miembro no cambie, se necesitará multiplicar el factor de fuera del paréntesis por D^{2a}. Como

$$y' = \frac{\Sigma f}{D^{2a+1}\sqrt{\pi}} \; \frac{\Gamma(a + 1.5)}{\Gamma a + 1)}$$

$$y' D^{2a} = \frac{\Sigma f}{D\sqrt{\pi}} \; \frac{\Gamma(a + 1.5)}{\Gamma(a + 1)}$$

Si a este resultado se le designa y_0, la fórmula del subsistema queda convertida en:

$$y = y_0\left(1 - \frac{\delta^2}{D^2}\right)^a$$

O, como la expresión de dentro del paréntesis es una diferencia de cuadrados (el de 1 y el de δ/D) equivalente al producto de una suma por una diferencia, se puede escribir:

$$y = y_0\left(1 + \frac{\delta}{D}\right)^a \left(1 - \frac{\delta}{D}\right)^a$$

Para aplicar esta fórmula al caso específico del ejemplo, basta con sustituir las literales por los valores previamente calculados.

Para el cálculo de las yes teóricas se necesita:

1º Calcular delta minúscula entre D, y anotar los resultados en una columna.

2º Sumar 1 a los valores encontrados y anotar los resultados en una segunda columna.

3º Restar los valores encontrados, de 1, y anotar resultados en una tercera columna.
4º Obtener en sendas columnas (cuarta y quinta) los logaritmos de los valores registrados en la segunda y tercera.
5º Sumar los logaritmos de las columnas cuarta y quinta correspondientes a cada delta minúscula.
6º Multiplicar cada suma por el valor de a.
7º Sumar a cada producto el logaritmo de y.
8º Buscar los antilogaritmos de los valores encontrados. Dichos antilogaritmos serán los valores teóricos.

DISTRIBUCIÓN POR EDADES DE LAS MUJERES MENORES DE 60 AÑOS EN KALABA

Edades	f_i'	d_i'	$d_i'f_i$	$d_i'^2f_i$	$d_i'^3f_i$	$d_i'^4f_i$
0 — 4	9	— 2.75	— 25	69	— 189	520
5 — 14	13	— 2	— 26	52	— 104	208
15 — 24	14	— 1	— 4	14	— 14	14
25 — 34	16	0	0	0	0	0
35 — 44	14	1	14	14	14	14
45 — 54	13	2	26	52	104	208
55 — 59	9	2.75	25	69	189	520
Sumas	*88*	*0.00*	*0*	*270*	*0*	*1484*
Momentos respecto a la media arbitraria			0	3	0	17
			v_1	v_2	v_3	v_4

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = v_2 - v_1^2 = 3 - 0 = 3$

$\mu_3 = v_3 - 3\,v_1\,v_2 + v_1^3 = 0$

$\mu_4 = v_4 - 4\,v_1\,v_3 + 6\,v_1^2\,v_2 - 3\,v_1^4 = 17$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{17}{3^2} = \frac{17}{9} = 1.89$$

El valor de $\mu_3 = 0$ muestra que la curva es simétrica y, por lo tanto, susceptible de graduación mediante las fórmulas del subsistema simétrico de Pearson. El valor de γ_4 menor que 3 muestra que la curva es platicúrtica y, por ello, que puede emplearse para su graduación la fórmula original sin transformar.